GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2020

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulpeksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en toon alle berekeninge:

(a) $2\left|e^x - 5\right| + 3 = 11$

$\left|e^x - 5\right| = 4$

$\therefore e^x - 5 = 4$ of $e^x - 5 = -4$

$\therefore e^x = 9$ of $e^x = 1$

$\therefore x = \ln 9$ of $x = 0$

ALTERNATIEF 1

$\left|e^x - 5\right| = 4$

$\left(e^x - 5\right)^2 = 16$

$e^{2x} - 10e^x + 9 = 0$

$\therefore \left(e^x - 1\right)\left(e^x - 9\right) = 0$

$\therefore e^x = 1$ *or* $e^x = 9$

$\therefore x = 0$ or $\ln 9$

'n kontrole toon beide werk

(b) $\ln x = 3$

$\therefore x = e^3$

$\therefore x = 20{,}1$

1.2 Bepaal a en b indien $\dfrac{a+bi}{5-i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

$$\frac{a+bi}{5-i}$$

$$= \frac{a+bi}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} \quad \begin{matrix}\text{m}\\ \text{a}\end{matrix}$$

$$= \frac{5a + bi^2 + ai + 5bi}{26}$$

$$= \frac{5a-b}{26} + \frac{a+5b}{26}i = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i$$

Stel reëele en imaginêre dele gelyk:

$5a - b = 13 \ (1)$ en $a + 5b = 13 \ (2)$

vermenigvuldig (2) met 5:

$5a + 25b = 65 \ (3)$

Trek (1) van (3) af

$26b = 52$

$\therefore b = 2$ en $a = 3$

ALTERNATIEF 1

$$a+bi=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(5-i)$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i^2$$
$$=3+2i$$
$$\therefore a=2 \text{ en } b=2$$

1.3 Bepaal in standaardvorm 'n vierdegraadsvergelyking met rasionale koëffisiënte waar twee van die wortels gelyk is aan $2+i$ en $1-\sqrt{3}$.

Ons weet dat $2-i$ en $1+\sqrt{3}$ ook wortels is aangesien komplekse en irrasionale wortels in toegevoegde pare voorkom

$$\left(x-(2+i)\right)\left(x-(2-i)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)=0$$
$$\therefore \left(x^2-4x+5\right)\left(x^2-2x-2\right)=0$$
$$\therefore x^4-6x^3+11x^2-2x-10=0$$

ALTERNATIEF

$$x^2-(\text{som van wortels})x+\text{produk van wortels}=0$$
$$\text{som van komplekse wortels}=4$$
$$\text{produk van komplekse wortels}=5$$
$$\text{som van irrasionale wortels}=2$$
$$\text{produk van irrasionale wortels}=-2$$
$$\therefore \left(x^2-4x+5\right)\left(x^2-2x-2\right)=0$$
$$\therefore x^4-6x^3+11x^2-2x-10=0$$

VRAAG 2

Vir 'n bepaalde jaarlikse rentekoers word die opbrengs verbeter deur die rente meer gereeld saam te stel. Daar is egter 'n perk. Indien rente voortdurend saamgestel word, geld die volgende formule:

$$A = Pe^{r\,t}$$

waar:

- P die hoofsom is wat belê word
- A die opgehoopte bedrag is
- r die jaarlike rentekoers is wat as 'n persentasie uitgedruk word
- t die tyd in jaar is

2.1 Maak t eers die onderwerp van die formule en bepaal dan hoe lank dit die geld sal neem om in waarde te verdriedubbel indien die rentekoers 10% per jaar is. Druk jou antwoord tot die naaste jaar uit.

$$\frac{A}{P} = e^{rt}$$
$$\therefore rt = \ln\frac{A}{P}$$
$$\therefore t = \frac{\ln\frac{A}{P}}{r}$$
$$\therefore t = \frac{\ln 3}{0{,}1}$$
$$\therefore t = 11 \text{ jaar}$$

2.2 Maak r eers die onderwerp van die formule en bepaal dan die jaarlikse rentekoers (uitgedruk as 'n persentasie tot 2 desimale plekke) wat R500 binne 3 jaar tot 'n totaal van R900 sal vermeerder.

$$\therefore rt = \ln\frac{A}{P}$$
$$\therefore r = \frac{\ln\frac{A}{P}}{t}$$
$$\therefore r = \frac{\ln\frac{900}{500}}{3}$$
$$\therefore r = 19{,}59\%$$

VRAAG 3

Gebruik volledige induksie om te bewys dat $n^3 + 2n$ deelbaar is deur 3 vir $n \in \mathbb{N}$.

Wanneer $n = 1$, het ons $1^3 + 2(1) = 3$ wat deelbaar is deur 3
Dus is dit waar vir $n = 1$
Neem aan waar vir $n = k$
dus $k^3 + 2k = 3p$ vir $p \in \mathbb{N}$

$$\text{nou } (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \text{ vir } k+1$$
$$= \left(k^3 + 2k\right) + 3k^2 + 3k + 3$$
$$= 3p + 3\left(k^2 + k + 1\right)$$

wat duidelik deelbaar is deur 3
dus het ons dit waar bewys vir $n = k + 1$
$\therefore$ volgens die beginsel van volledige induksie het ons dit waar bewys vir $n \in \mathbb{N}$

ALTERNATIEF 1

Wanneer $n = 1$ het ons $1^3 + 2(1) = 3$ wat deelbaar is deur 3 – dus het ons dit waar bewys vir n = 1 so dit is waar vir $n = 1$
Neem aan waar vir $n = k$
viz. $k^3 + 2k$ is deelbaar deur 3

$$\text{now } (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$$
$$= \left(k^3 + 2k\right) + 3k^2 + 3k + 3$$
$$= \left(k^3 + 2k\right) + 3\left(k^2 + k + 1\right)$$

wat duidelik deelbaar is deur 3
so, ons het dit waar bewys vir $n = k + 1$
$\therefore$ deur die beginsel van volledige induksie, het ons dit waar bewys vir $n \in \mathbb{N}$

VRAAG 4

Bepaal $f'(x)$ uit eerste beginsels indien $f(x) = \sqrt{1-x}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-(x+h)} - \sqrt{1-x}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-(x+h)} - \sqrt{1-x}}{h} \times \frac{\sqrt{1-(x+h)} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(x+h)} + \sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-(x+h)-(1-x)}{h\left(\sqrt{1-(x+h)} + \sqrt{1-x}\right)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h\left(\sqrt{1-(x+h)} + \sqrt{1-x}\right)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-(x+h)} + \sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

VRAAG 5

5.1 Beskou die funksie $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2-5x-6}$.

(a) Gee die vergelykings en aard van alle asimptote.

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{(x-6)(x+1)}$$

dus vertikale asimptote van $x=6$ en $x=-1$
horisontale asimptoot van $y=2$

(b) Bewys dat die funksie streng dalend is.

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{x^2-5x-6}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(4x+2)(x^2-5x-6)-(2x-5)(2x^2+2x-3)}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{4x^3-18x^2-34x-12-(4x^3-6x^2-16x+15)}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-12\left[x^2+\frac{3}{2}x+\frac{27}{12}\right]}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-12\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{27}{12}\right]}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-12\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{16}\right]}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-12\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{81}{4}}{(x^2-5x-6)^2}$$

wat altyd negatief is, dus is die funksie streng dalend

ALTERNATIEF 1

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{x^2-5x-6}$$
$$=\frac{2x^2+2x-3}{(x-6)(x+1)}$$
$$=\frac{A}{x-6}+\frac{B}{x+1}$$
$$=\frac{81}{7}(x-6)^{-1}+\frac{3}{7}(x+1)^{-1}$$
$$f'(x)=-\frac{81}{7(x-6)^2}-\frac{3}{7(x+1)^2}$$
$$<0$$

so, f is altyd dalend

ALTERNATIEF 2

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{x^2-5x-6}$$
$$\therefore f'(x)=\frac{(4x+2)(x^2-5x-6)-(2x-5)(2x^2+2x-3)}{(x^2-5x-6)^2}$$
$$\therefore f'(x)=\frac{-12x^2-18x-27}{(x^2-5x-6)^2}$$

nou, teller het geen reële wortels $\left(-\frac{3}{4}\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)$ en is konkaaf na onder

so is altyd negatief

$\therefore f$ is dalend

ALTERNATIEF 3

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{x^2-5x-6}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{(4x+2)(x^2-5x-6)-(2x-5)(2x^2+2x-3)}{(x^2-5x-6)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-12x^2-18x-27}{(x^2-5x-6)^2}$$

nou, in die teller:

draaipunt : $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{4}$ (of gebruik calculus) en $y=-\frac{81}{4}$

dit is konkaaf na onder

so f' is altyd negatief

$\therefore f$ is altyd dalend

5.2 Gee die vergelyking van 'n rasionale funksie wat:

- 'n skuins asimptoot van $y=2x+1$ het
- 'n vertikale asimptoot van $x=-2$ het
- geen *x*-afsnitte het nie

$(x+2)(2x+1)+\text{res}$

$$y=\frac{2x^2+5x+13}{x+2}$$

LET WEL:
Antwoord is nie uniek nie c moet groter wees as 25/8

ALTERNATIEF 1

$$y=2x+1+\frac{a}{x+2}$$
$$=\frac{(2x+1)(x+2)+a}{x+2}$$
$$=\frac{2x^2+5x+2+a}{x+2}$$

$$nou\ \triangle=5^2-4(2)(2+a)$$
$$=9-8a$$

ons benodig $\triangle<0$

$$\therefore a<\frac{9}{8}$$

$$\therefore y=2x+1+\frac{2*}{x+2}\quad\left(\text{*enige waarde groter as }\frac{9}{8}\right)$$

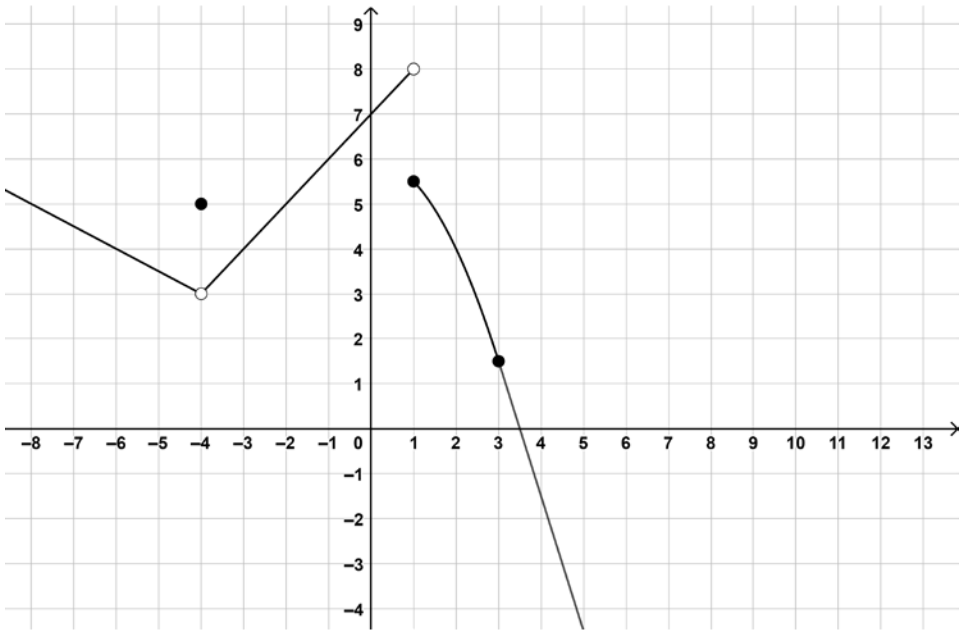
$$or\ y=\frac{2x^2+5x+4\#}{x+2}\left(\#\text{ enige y-waarde groter as }\frac{9}{8}+2\right)$$

VRAAG 6

Beskou die funksie *f* wat soos volg gedefinieer word:

$$f(x)=\begin{cases} -0,5x+1 & x<-4 \\ 5 & x=-4 \\ x+7 & -4<x<1 \\ -0,5x^2+6 & 1\leq x\leq 3 \\ ax+b & x\geq 3 \end{cases}$$

f word op die grafiek hieronder uitgebeeld:



6.1 Identifiseer deur middel van hul *x*-koördinate enige diskontinuïteitspunte. Jy moet ook die diskontinuïteit klassifiseer en jou klassifikasies wiskundig regverdig. Gee noukeurig aandag aan notasie.

Daar is 'n verwyderbare diskontinuïteit by $x=-4$
aangesien $\lim_{x\to-4} f(x)\neq f(-4)$

Daar is 'n nieverwyderbare/sprongdiskontinuïteit by $x=1$
aangesien $\lim_{x\to 1} f(x)$ *d.n.e.*

6.2 Bepaal *a* en *b* indien *f* differensieerbaar is by $x = 3$.

Indien *f* differensieerbaar is by 3, moet dit kontinu wees by 3.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1{,}5$$

dus $\lim_{x \to 3^+} (ax + b) = 1{,}5$

$$\therefore 3a + b = 1{,}5$$

maar ons weet ook dat $\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} f'(x)$

dus $\lim_{x \to 3^-} (-x) = \lim_{x \to 3^+} a$

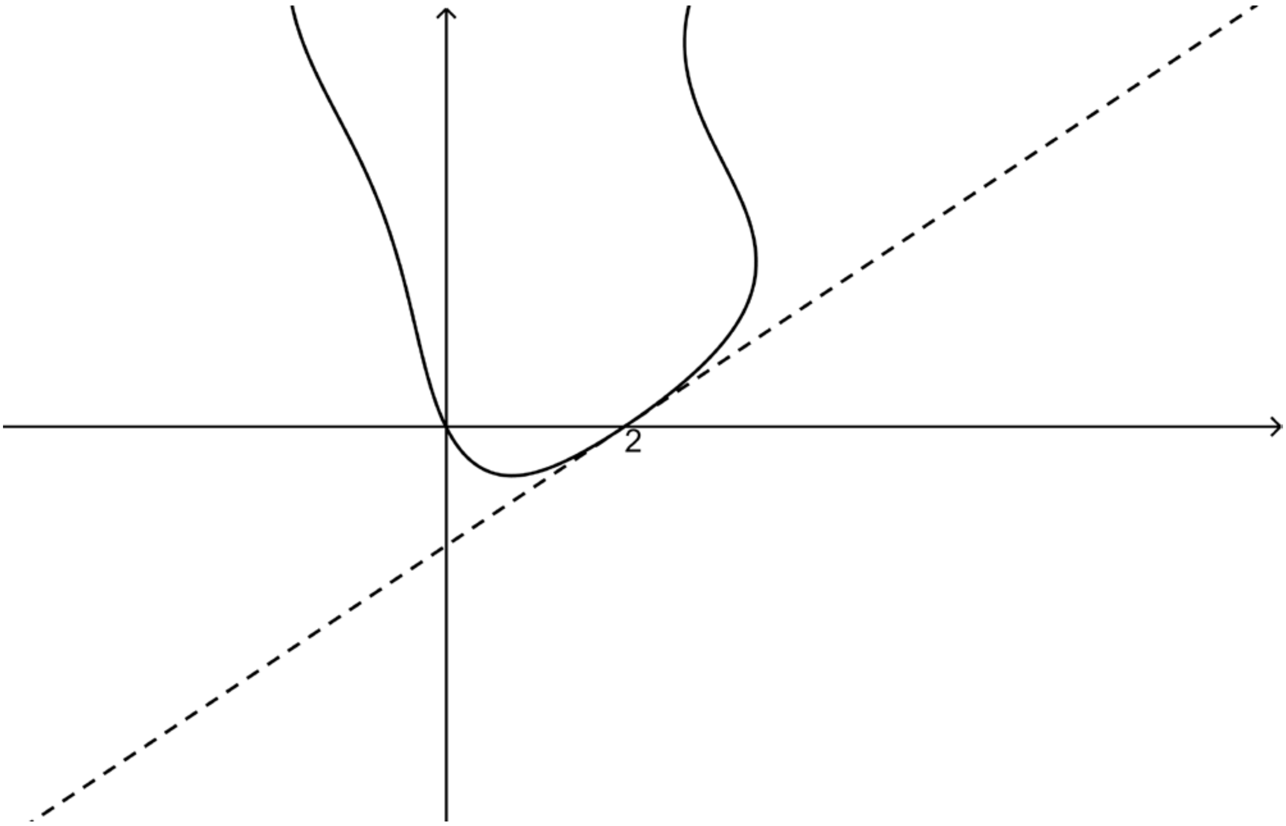
$$\therefore -3 = a$$

$$\therefore b = 10{,}5$$

VRAAG 7

'n Gedeelte van die implisiet gedefinieerde kromme $x^2 - x\sin y = y + 2x$ word hieronder getoon.

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punt $(2\,;0)$.



$$2x - (1\sin y + xy'\cos y) = y' + 2$$
$$\therefore 2x - \sin y - xy'\cos y - y' = 2$$
$$\therefore y'(-x\cos y - 1) = 2 - 2x + \sin y$$
$$\therefore y' = \frac{2 - 2x + \sin y}{-x\cos y - 1}$$

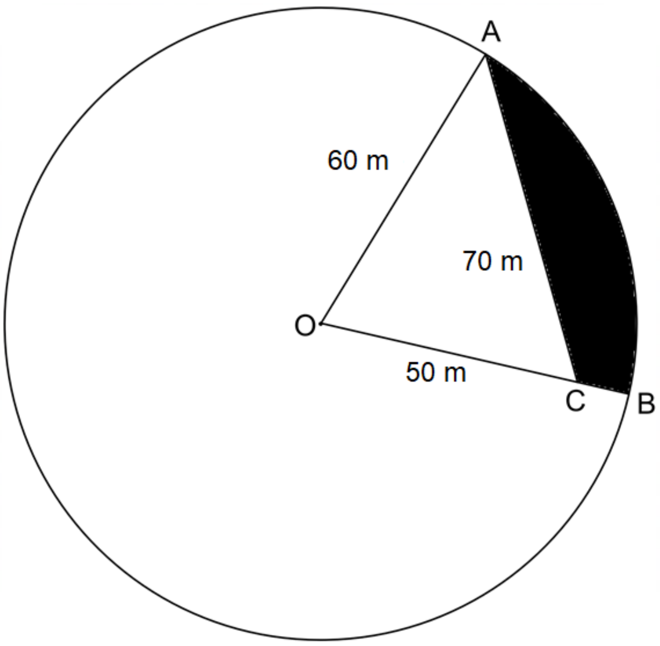
wanneer $x = 2$ en $y = 0$

$$y' = \frac{2 - 4 + 0}{-2 - 1} = \frac{2}{3}$$
$$\therefore y - 0 = \frac{2}{3}(x - 2)$$
$$\therefore y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

VRAAG 8

[Bron: <https://www.northwesthydro.com.au/blog/solar-pumping-for-centre-pivot-irrigation/>]

Die skets hieronder is dié van 'n sirkelvormige land met 'n sentralespilpunt-besproeiingstelsel daarop. O is die middelpunt en OCB is 'n reguitlyn. OA is 60 m en OC is 50 m. AC is 70 m.



'n Lugfoto van die land het getoon dat die gearseerde oppervlakte vervuil is van onkruid. Watter persentasie van die land is vervuil?

laat $B\hat{O}A = \theta$ dan $\cos\theta = \dfrac{50^2 + 60^2 - 70^2}{2(50)(60)} = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{5} = 1{,}369$

gearseerde oppervlakte nou $=$ sektor $AOB - \Delta AOC$

$$= \frac{1}{2}60^2(1{,}369) - \frac{1}{2}(60)(50)\sin(1{,}369)$$

$$= 995{,}295$$

As persentasie van die totaal:

$\dfrac{995{,}295}{\pi \times 60^2} \times 100 = 8{,}8\%$

ALTERNATIEF 1

laat $B\hat{O}A = \theta$ dan $\cos\theta = \dfrac{50^2 + 60^2 - 70^2}{2(50)(60)} = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{5} = 1{,}369$

$\dfrac{\sin A\hat{C}O}{60} = \dfrac{\sin 1{,}3694...}{70}$

$\therefore A\hat{C}O = 0{,}99696...$

$\therefore A\hat{C}B = \pi - 0{,}99696...$

$\therefore A\hat{C}B = 214463...$

Oppervlakte $=$ Oppervlakte $\triangle ACB +$ segment AB

$= \dfrac{1}{2}(70)(10)\sin 2{,}1446 + \dfrac{1}{2}\left(60^2\right)(1{,}369... - \sin 1{,}369...)$

$= 293{,}9387.... + 701{,}3565....$

$= 995{,}295$

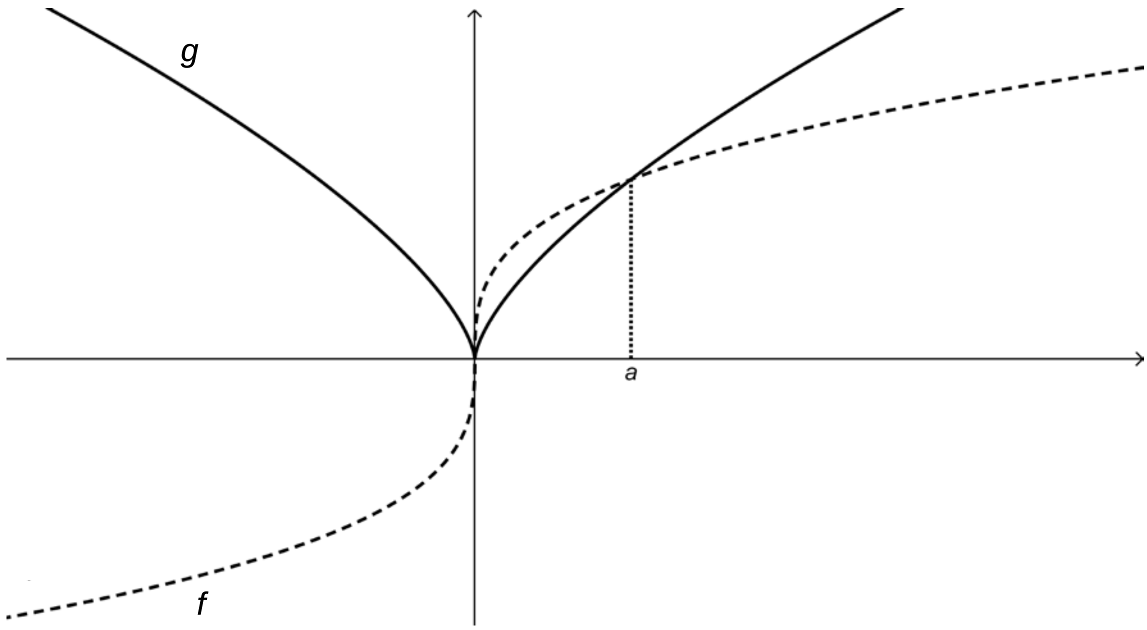
As 'n persentasie van die totaal:

$\dfrac{995{,}295}{\pi \times 60^2} \times 100 = 8{,}8\%$

VRAAG 9

9.1 Beskou die twee funksies hieronder:

f is 'n **onewe** funksie aangesien $f(-x) = -f(x)$, terwyl *g* 'n **ewe** funksie is aangesien $g(-x) = g(x)$. Om jou te help om hulle te onderskei, is *f* met 'n stippellyn en *g* met 'n soliede lyn geteken. *f* en *g* sny by *x* = *a*.



Indien verder gegee word dat $\int_0^a f(x)dx = 0{,}75$ en $\int_0^a g(x)dx = 0{,}6$, bepaal die volgende:

(a) $\int_0^a f(x) - g(x)\,dx$

$= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx$
$= 0{,}75 - 0{,}6$
$= 0{,}15$

(b) $\int_{-a}^{0} f(x) + g(x)\, dx$

$= \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{-a}^{0} g(x)\, dx$
$= -0{,}75 + 0{,}6$
$= -0{,}15$

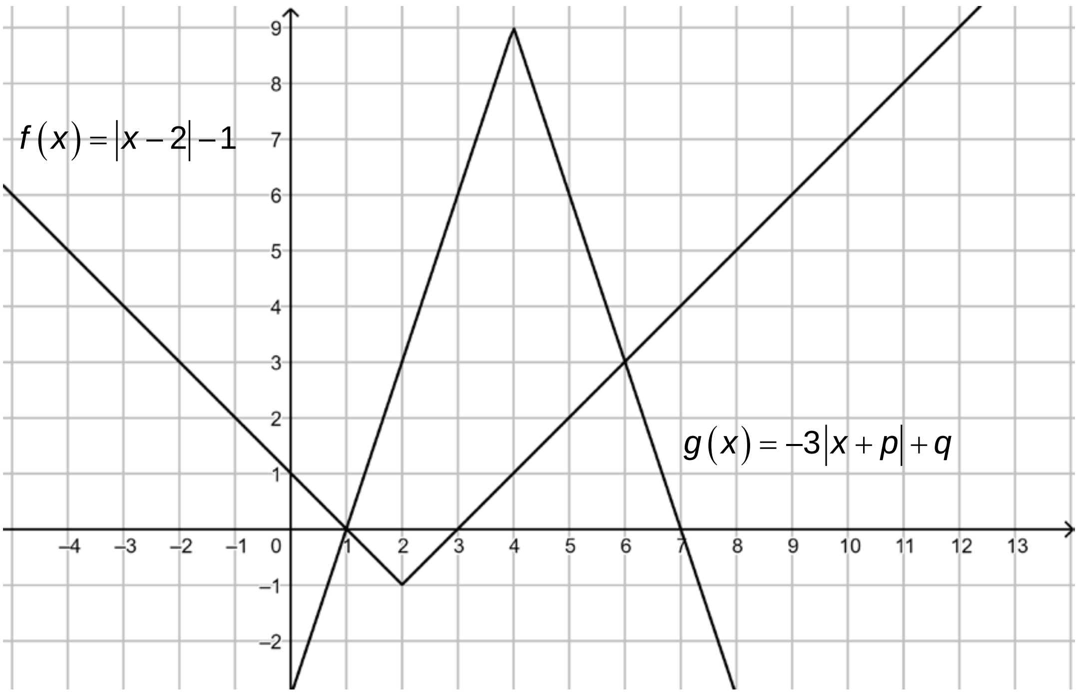
(c) $\int_{-a}^{a} 2f(x) + 3g(x)\, dx$

$= 2\int_{-a}^{a} f(x)\, dx + 3\int_{-a}^{a} g(x)\, dx$
$= 2(0) + 3(2 \times 0{,}6)$
$= 3{,}6$

(d) $\int_{-a}^{a} f(|x|)\, dx$

$= 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$
$= 2 \times 0{,}75$
$= 1{,}5$

9.2 Beskou die funksies $f(x)=|x-2|-1$ en $g(x)=-3|x+p|+q$ wat hieronder geteken is:



(a) Bepaal die waardes van *p* en *q.*

$p=-4$ en $q=9$

ALTERNATIEF 1

gebruik die punte $(1;0)$ en $(7;0)$

$0=-3|1+p|+q$

$q=-3-3p\ (1)$

$0=-3|7+p|+q$

$q=21+3p\ (2)$

los (1) en (2) gelyktydig op:

$-3-3p=21+3p$

$\therefore p=-4$ en $q=9$

(b) Gebruik die grafieke, of andersins, en los op: $|x-2|+3|x-4|>10$.

$|x-2|+3|x-4|>10$

$\therefore |x-2|>-3|x-4|+10$

$\therefore |x-2|-1>-3|x-4|+9$

maar dit is net waar $f>g$

dus $x<1$ of $x>6$

ALTERNATIEF 1 (ALGEBRAÏES)

$|x-2|+3|x-4|>10$

geval 1: $x<2$

$-x+2-3(x-4)>10$

$-x+2-3x+12>10$

$\therefore -4x>-4$

$\therefore x<1$ - konsekwent daarom 'n deel van die oplossing

geval 2: $2\leq x<4$

$x-2-3(x-4)>10$

$x-2-3x+12>10$

$-2x+10>10$

$-2x>0$

$x<0$ – 'n teensrydigheid - daarom geen oplossing

geval 3: $x\geq 4$

$x-2+3(x-4)>10$

$\therefore x-2+3x-12>10$

$\therefore 4x-14>10$

$\therefore 4x>24$

$\therefore x>6$ - konsekwent daarom 'n deel van die oplossing

$\therefore x<1$ or $x>6$

(c) Bepaal $\int_1^7 g(x)\,dx$.

$$=\int_1^4 3x-3\,dx+\int_4^7 -3x+21\,dx$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}-3x\right]_1^4-\left[\frac{-3x^2}{2}+21x\right]_4^7$$

$$=13{,}5+13{,}5$$

$$=27$$

ALTERNATIEF 1

$\int_1^7 -3|x-4|+9\,dx=27$ (met gebruik van sakrekenaar)

ALTERNATIEF 2

Oppervlakte van driehoek =

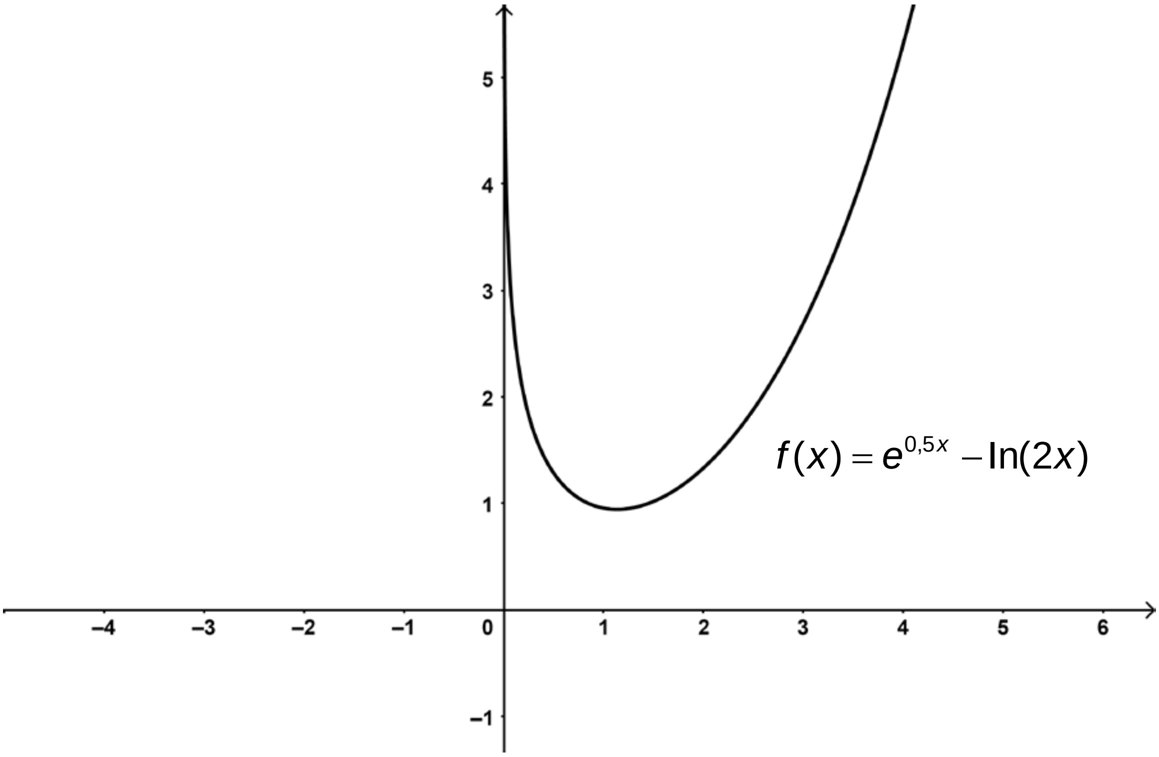
$$\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{ht}$$

$$= \frac{1}{2}(6)(9)$$

$$= 27 \text{ eenhede}^2$$

VRAAG 10

Gebruik Newton-Raphson-iterasie om die draaipunt van die gegewe funksie te bepaal.



Jy moet die volgende doen:

- Toon die iteratiewe formule wat jy gebruik.
- Gebruik 'n aanvanklike benadering van $x = 2$.
- Toon jou eerste benadering tot 5 desimale plekke.

$f(x) = e^{0,5x} - \ln(2x)$

dus $f'(x) = \frac{1}{2}e^{0,5x} - \frac{2}{2x}$

ons wil oplos $\frac{1}{2}e^{0,5x} - \frac{1}{x} = 0$

so dit is ons $f(x)$

dan $f'(x) = \frac{1}{4}e^{0,5x} + \frac{1}{x^2}$

dus $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\frac{1}{2}e^{0,5x_n} - \frac{1}{x_n}}{\frac{1}{4}e^{0,5x_n} + \frac{1}{x_n{}^2}}$

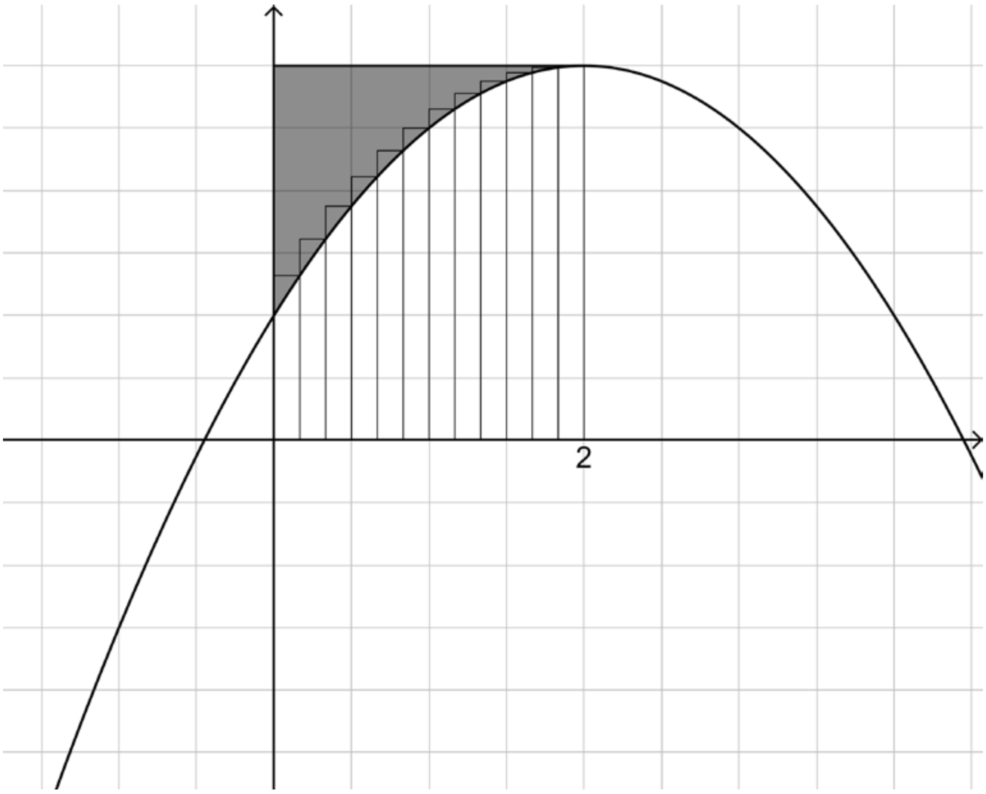
$\therefore x_1 = 1{,}07577$

$\therefore x = 1{,}13429$

VRAAG 11

11.1 Wanneer die oppervlakte wat deur die kromme f, die x-as en die lyne $x = 0$ en $x = 2$ begrens word, in n reghoeke verdeel word, word die oppervlakte gegee deur:

$$A = -\frac{8}{3} - \frac{4}{3n^2} + 12 + \frac{4}{n}$$



Indien verder gegee word dat $f(2) = 6$, bepaal die gearseerde oppervlakte korrek tot 2 desimale plekke.

$$\text{Oppervlakte tussen kromme en x-as} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{3n^2} + 12 + \frac{4}{n}\right) = \frac{28}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{dus gearseerde oppervlakte} &= 2\times 6 - \frac{28}{3}\\ &= 12 - \frac{28}{3}\\ &= \frac{36}{3} - \frac{28}{3}\\ &= \frac{8}{3}\ \text{eenhede}^2\end{aligned}$$

11.2 Bepaal:

(a) $\int x\left(3x^2+7\right)^3\,dx$

$$=\frac{\left(3x^2+7\right)^4}{24}+c$$

ALTERNATIEF 1

$$\int x\left(3x^2+7\right)^3\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\int 6x\left(3x^2+7\right)^3\,dx$$
$$=\frac{\frac{1}{6}\left(3x^2+7\right)^4}{4}+c$$
$$=\frac{1}{24}\left(3x^2+7\right)^4+c$$

ALTERNATIEF 2

$$\int x\left(3x^2+7\right)^3\,dx$$
$$let\ u=3x^2+7$$
$$\therefore\frac{du}{dx}=6x$$
$$\therefore\frac{1}{6}du=xdx$$
$$\therefore\frac{1}{6}\int u^3\,du$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{u^4}{4}+c$$
$$=\frac{\left(3x^2+7\right)^4}{24}+c$$

ALTERNATIEF 3

$$\int x\left(3x^2+7\right)^3 dx$$
$$=\int 27x^7+189x^5+441x^3+343x\ dx$$
$$=\frac{27}{8}x^8+\frac{63}{2}x^6+\frac{441}{4}x^4+\frac{243}{2}x^2+c$$

(b) $\int e^{2x}x\ dx$

laat $f(x)=x$ en $g'(x)=e^{2x}$

dan $f'(x)=1$ en $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x}x\ dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

ALTERNATIEF 1

$$\int e^{2x}x\ dx$$

let $u=e^{2x}$ *so* $2x=\ln u$ *and* $x=\frac{1}{2}\ln u$

$$\frac{du}{dx}=2e^{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int \ln u\ du$$
$$=\frac{1}{4}\left(u\ln u-u\right)+c$$
$$=\frac{1}{4}e^{2x}\ln e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$
$$=\frac{1}{4}e^{2x}2x-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$
$$=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+c$$

(c) $\int \frac{3x-5}{x^2-2x-3}\,dx$

$$\frac{3x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+1} \text{(oordekkingsmetode)}$$

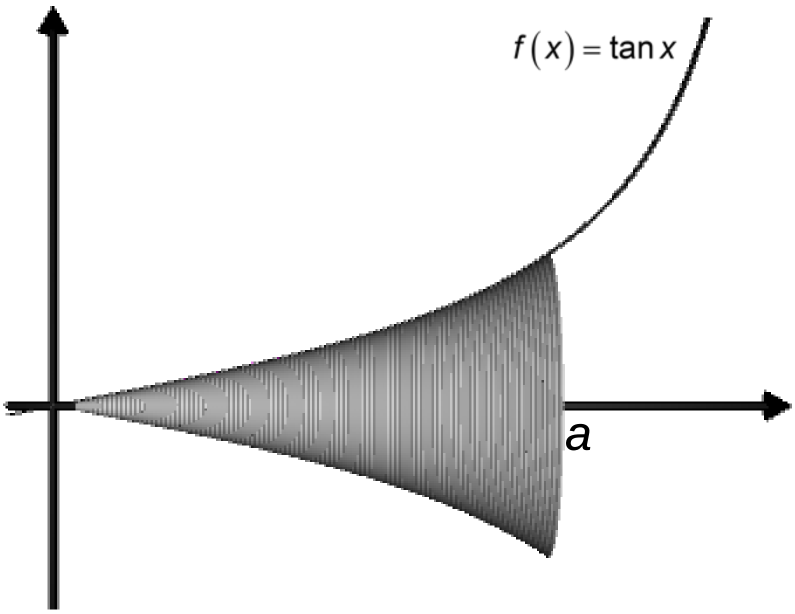
$$\therefore \int \frac{3x-5}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{2}{x+1}dx$$
$$= \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + c$$

ALTERNATIEF

$$\int \frac{3x-5}{x^2-2x-3}\,dx$$
$$= \int \frac{2x-2}{x^2-2x-3}\,dx + \int \frac{x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$
$$= \ln|x^2-2x-3| + \int \frac{x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx$$
$$= \ln|x^2-2x-3| + \int \frac{1}{(x+1)}\,dx$$
$$= \ln|x^2-2x-3| + \ln|x+1| + c$$

VRAAG 12

Die oppervlakte wat deur die kromme $f(x) = \tan x$, die x-as, die lyn $x = 0$ en die lyn $x = a$ begrens word, word om die x-as geroteer vir $a < \frac{\pi}{2}$.



Gee 'n uitdrukking vir die volume in terme van a.

$$\begin{aligned}
\text{volume} &= \pi\int_0^a (\tan(x))^2\,dx \\
&= \pi\int_0^a \tan^2 x\,dx \\
&= \pi\int_0^a \sec^2 x - 1\,dx \\
&= \pi[\tan x - x]_0^a \\
&= \pi[\tan a - a] - \pi[\tan 0 - 0] \\
&= \pi[\tan a - a]
\end{aligned}$$

Totaal: 200 punte